В. А. Арефьев

Решение уравнений четвёртой степени по методу Феррари.

В общем случае, приведённое уравнение четвёртой степени вида

$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ можно решить методом Феррари.

Находится y_0 – любой из корней кубического уравнения

$y^3-By^2+(AC-4D)y-A^2D+4BD-C^2=0$. Затем решаются два квадратных уравнения

$x^2+\frac{A}{2}x+\frac{y_0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-B+y_0\right)x^2+\left(\frac{A}{2}y_0-C\right)x+\frac{{y_0}^2}{4}-D}=0$, в которых подкоренное выражение является полным квадратом.

Корни этих уравнений являются корнями исходного уравнения четвёртой степени.

Методы решения уравнения четвёртой степени.

I. Новый вывод метода Феррари решения уравнения четвёртой степени.

Берём уравнение общего вида без первого коэффициента.

1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Раскладываем его на два квадратных уравнения.

2) $x^2 + px + q = 0$
3) $x^2 + p^1x + q^1 = 0$

Перемножаем уравнения и сравниваем с (1).

4) $x^4 + x^3(p + p^1) + x^2(q + q^1 + pp^1) + x(pq^1 + q^1p) + qq^1 = 0$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях.

5) $a = p + p^1$

$b = q + q^1 + pp^1$

$c = pq^1 + p^1q$

$d = qq^1$

Имеем четыре уравнения, четырёх неизвестных.

Решение системы обычными методами приводит снова к уравнению четвёртой степени. Но мы замечаем, что в ней суммы и произведения, а значит полезно применить подстановку сопряжённых чисел. Пусть:

6) $p = \frac{A+B}{2}$

$p^1 = \frac{A-B}{2}$

$q = \frac{y+D}{2}$

$q^1 = \frac{y-D}{2}$

Вместо (C) мы взяли (y) и будем к нему всё сводить.

7) $a = p + p^1 = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A$;

$a = A$ Для такого результата мы и брали двойки внизу.

8) $b = q + q^1 + pp^1 = \frac{y+D}{2} - \frac{y-D}{2} + \left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A-B}{2}\right) = y + \frac{A^2-B^2}{4}$;

$B^2 = a^2 - 4b + 4y$;

9) $d = qq^1 = \left(\frac{y+D}{2}\right)\left(\frac{y-D}{2}\right) = \frac{y^2-D^2}{4}$;

$D^2 = y^2 - 4d$

10) $c = pq^1 + p^1q = \left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{y-D}{2}\right) + \left(\frac{A-B}{2}\right)\left(\frac{y+D}{2}\right) = \frac{1}{4}(Ay - AD + By - BD + Ay - AD - BD) = \frac{1}{4}(2ay - 2BD)$;

11) $BD = ay - 2c$;

У нас есть (B) и (D) в квадрате, поэтому возводим (11) в квадрат и подставляем значения (B) и (D).

12) $(a^2 - 4b + 4y)(y^2 - 4D) = (ay - 2c)^2$;

$a^2y^2 - 4a^2D - 4by^2 + 16bD + 4y^3 - 16yD = a^2y^2 - 4acy + 4c^2$;

Сократим на a^2y^2 и, поделив на 4, получим:

13) $y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0$

Это резольвента уравнения (1). Решив это кубическое уравнение, возьмём любой корень (лучше действительный), и тогда у нас будет всё для составления квадратных уравнений (2) и (3). Решив их, мы найдём все корни исходного уравнения (1). Но прежде мы выведем решение Феррари.

Вывод уравнения Феррари.

Возьмём уравнения (2) и (3) и подставим найденные коэффициенты.

14) $x^2 + px + q = x^2 + x\left(\frac{a+B}{2}\right) + \frac{y+D}{2} = x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} + \left(\frac{Bx}{2} + \frac{D}{2}\right) = 0$

15) $x^2 + p^1x + q^1 = x^2 + x\left(\frac{a-B}{2}\right) + \frac{y-D}{2} = x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} - \left(\frac{Bx}{2} + \frac{D}{2}\right) = 0$

Объединим эти уравнения (опустив штрихи):

16) $x^2 + px + q = x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} \pm \left(\frac{Bx}{2} + \frac{D}{2}\right) = 0$

У нас (B) и (D) в квадрате, поэтому возведём скобку в квадрат.

17) $\left(\frac{Bx}{2} + \frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(B^2x^2 + 2BDx + D^2)$ Подставим в (16), перенеся скобку вправо.

18) $x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}(B^2x^2 + 2BDx + D^2)}$;

Подставим (B), (D), (BD) из формул (8), (9), (11).

19) $x^2 + \frac{ay}{2} + \frac{y}{2} = \pm\sqrt{x^2\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right) + x\left(\frac{ay}{2} - c\right) + \left(\frac{y^2}{4} - d\right)}$;

Это и есть решение Феррари. Под корнем полный квадрат (ф. 18). Подставив (a), (b), (c) из уравнения (1), а (y) из решения резольвенты и составив квадрат под корнем, извлечём корень. У нас получается два квадратных уравнения, которые дадут четыре корня исходного уравнения.

II. Решение уравнения четвёртой степени методом сопряжённых чисел.

2.1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

2.2) $x^2 + px + q = 0$

2.3) $x^2 + p^1x + q^1 = 0$

2.4) $p = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}$

2.5) $p^1 = \frac{a}{2} - K\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}$

2.6) $q = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - d}$

2.7) $q^1 = \frac{y}{2} - K\sqrt{\frac{y^2}{4} - d}$

Когда мы возводили уравнение (11) в квадрат, то приобрели лишние корни, и коэффициент (K) должен их устранять. Из ф. 11 мы имеем:

$BD = ay - 2c$; если $ay - 2c > 0$, то (B) и (D) одного знака, а если $ay - 2c < 0$, то (B) и (D) разного знака.

Получается критерий:

При $\frac{ay}{2} > c$ будет $K = +1$; при $\frac{ay}{2} < c$, то $K = -1$;

У Феррари такой критерий не нужен, – там, если $\frac{ay}{2} > c$, то под корнем квадрат суммы, а если $\frac{ay}{2} < c$, то квадрат разности и лишних корней нет.

Подставим (p, p^1, q, q^1, y, K) в квадратные уравнения (2.2), (2.3)

2.8) $x^2 + x\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}\right) + \left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - d}\right) = 0$

2.9) $x^2 + x\left(\frac{a}{2} - K\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}\right) + \left(\frac{y}{2} - K\sqrt{\frac{y^2}{4} - d}\right) = 0$

После решения резольвенты и определения (K) все величины известны. Итак, мы решили уравнение четвёртой степени методом сопряжённых чисел, а заодно вывели решение Феррари и доказали, что у него под корнем полный квадрат.

III. Для сравнения рассмотрим метод Декарта-Эйлера.

3.1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Подстановкой $x = y - \frac{a}{4}$ уравнение приводится к неполному виду.

3.2) $y^4 + px^2 + qx + r = 0$

Составляется резольвента этого неполного уравнения.

3.3) $Z^3 + \frac{p}{2}Z^2 + \left(\frac{p^2-4r}{16}\right)Z + \left(-\frac{q^2}{64}\right) = 0$

Корни этой резольвенты (Z_1), (Z_2), (Z_3), причем нужны все.

Решениями уравнения (3.2) будут:

3.4) $y = \pm\sqrt{Z_1} \pm \sqrt{Z_2} \pm \sqrt{Z_3}$; так как здесь восемь вариантов, то четыре решения лишние и их отсекают критериями.

3.5) $K = \sqrt{Z_2} \cdot \sqrt{Z_2} \cdot \sqrt{Z_3} = -\frac{q}{8}$;

Знаки решения (3.4) надо выбрать так, чтобы выполнялось (3.5).

Метод интересный и красивый. Избавившись от x^3, решили резольвенту и получили разом все решения неполного уравнения, и подстановкой $x = y - \frac{a}{4}$ нашли все решения уравнения (3.1)

IV. <u>На примере посмотрим решения этими тремя методами и сравним.</u>

4.1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

4.2) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0$

Пример взят из интернета [3] , [6]

Составляем кубическую резольвенту.

4.3) $y^3 + (-b)y^2 + (ac - 4d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0$

$a = 3$; $b = 3$; $c = -1$; $d = -6$; подставив получаем

4.4) $y^3 - 3y^2 + 21y - 19 = 0$; нам нужен только один корень.

Подбираем действительный корень $y = +1$;

По Феррари (ф. 19)

4.5) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{x^2\left(\frac{9}{4} - 3 + 1\right) + x\left(\frac{3}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + 6\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}} = \pm\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)$

Получаем два уравнения.

4.6) $x^2 + 2x + 3 = 0$; $x_1 = -1 + i\sqrt{2}$; $x_2 = -1 - i\sqrt{2}$

4.7) $x^2 + x - 2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = -2$; Решение окончено.

У метода сопряжённых чисел будет та же резольвента и мы сразу пишем уравнения (2.8), (2.9)

Критерий: $\frac{ay}{2} = \frac{3}{2} > (-1)$; $K = +1$

4.8) $x^2 + x\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}\right) + \left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - d}\right) = x^2 + x\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 3 + 1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 6}\right) = x^2 + 2x + 3 = 0$;

$x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$;

4.9) $x^2 + x\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}\right) + \left(\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - d}\right) = x^2 + x\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 3 + 1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 6}\right) = x^2 + x - 2 = 0$;

$x_3 = 1$; $x_4 = -2$;

Корни хорошо извлеклись, так как под корнями фактически (B^2) и (D^2).

А в формуле Феррари под корнями фактически $\frac{1}{4}(B^2 + 2BD + D^2)$, т.е. полный квадрат. У него надо сперва составить под корнем квадрат, извлечь, перегруппировать по степеням (x) и тогда получатся квадратные уравнения. В методе сопряжённых чисел уравнения уже готовы, но надо сперва найти критерий, что несложно.

А так, методы близкие родственники.

V. Решение уравнений методом Декарта-Эйлера.

5.1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$;

5.2) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0$; $a = 3$; $b = 3$; $c = -1$; $d = -6$;

Избавляемся от x^3 подстановкой $x = y - \frac{a}{4} = y - \frac{3}{4}$;

5.3) $y^4 + py^2 + qy + r = 0$; где

5.4) $p = b - \frac{1}{8}a^2 = -\frac{3}{8}$;

5.5) $q = c + \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^4 = -\frac{17}{8}$;

5.6) $r = \frac{1}{16}a^2 d - \frac{1}{4}ac - \frac{3}{256}a^4 = -\frac{1155}{256}$;

5.7) $y^4 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{17}{8}y - \frac{1155}{256} = 0$

Составляем резольвенту (она здесь другая).

5.8) $Z^3 + \frac{p}{2}Z^2 + \frac{(p-4r)Z}{16} - \frac{q^2}{64} = 0$

5.9) $\frac{p}{2} = -\frac{3}{16}$; $\frac{p-4r}{16} = \frac{291}{256}$; $\frac{q^2}{64} = \frac{289}{4096}$;

5.10) $Z^3 - \frac{3}{16}Z^2 + \frac{291}{256}Z - \frac{289}{4096} = 0$; $\frac{289}{4096} = \frac{17^2}{16^3}$;

По свободному числу подбираем корень $Z_1 = \frac{1}{16}$;

Делим (5.9) на $(y - \frac{1}{16})$ и получаем уравнение

5.11) $Z^2 - \frac{1}{8}Z + \frac{281}{256} = 0$; Находим $Z_{2,3} = \frac{1}{16}\left(1 \pm i\sqrt{288}\right)$;

5.12) Решение неполного уравнения (5.3) ищем в виде:

$y = \pm\sqrt{Z_1} \pm \sqrt{Z_2} \pm \sqrt{Z_3}$; здесь восемь вариантов, следующие четыре корня лишние.

5.13) Критерий $K = \sqrt{Z_1} \cdot \sqrt{Z_2} \cdot \sqrt{Z_3} = -\frac{q}{8} = +\frac{17}{64}$;

Имеем $Z_1 = \frac{1}{16}$; $Z_2 = \frac{1}{16}\left(1 + i\sqrt{288}\right)$; $Z_3 = \frac{1}{16}\left(1 - i\sqrt{288}\right)$;

Извлекаем корни из комплексных чисел алгебраическим методом.

$\sqrt{A + iB} = \pm\left(\sqrt{\frac{R+A}{2}} + sgn\, B \cdot i\sqrt{\frac{R-A}{2}}\right)$; где $R = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\sqrt{1 + i\sqrt{288}} = \pm\left(\sqrt{\frac{17+1}{2}} + 1 \cdot i\sqrt{\frac{17-1}{2}}\right) = \pm\left(3 + i\sqrt{8}\right)$; $R = \sqrt{i^2 + 288} = 17$; $sgh\, B = 1$;

$$\sqrt{1-i\sqrt{288}} = \pm\left(\sqrt{\frac{17+1}{2}} - 1\cdot i\sqrt{\frac{17-1}{2}}\right) = \pm\left(3-i\sqrt{8}\right)\ ;\ \ R = 17\ ;\ \ sgn\,B = -1\ ;$$

$$\sqrt{Z_2} = \pm\frac{1}{4}\left(3+i\sqrt{8}\right) = \pm\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right) = \pm\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ;$$

$$\sqrt{Z_3} = \pm\frac{1}{4}\left(3-i\sqrt{8}\right) = \pm\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ;$$

$$\sqrt{Z_1} = \pm\frac{1}{4}\ ;$$

$$y = \pm\frac{1}{4}\pm\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pm\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ; \qquad \text{Критерий } K = +\frac{17}{64}\ ;$$

Берем $+,-,-$; $y_1 = \frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5}{4}$; $K_1 = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{17}{64}$; верно.

Берем $+,+,+$; $y_2 = \frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = +\frac{7}{4}$; $K_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{17}{64}$; верно.

Берем $-,+,-$; $y_3 = -\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}+i\sqrt{2}$; $K_3 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1)\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{17}{64}$; верно.

Берем $-,-,+$; $y_4 = -\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}-i\sqrt{2}$; $K_4 = \left(-\frac{1}{4}\right)(-1)\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{17}{64}$; верно.

В связи со сложностью расчёта сделаем проверку решения по уравнению (5.7) методом умножения.

$$\left(y+\frac{5}{4}\right)\left(y-\frac{7}{4}\right)\left(y+\frac{1}{4}-i\sqrt{2}\right)\left(y+\frac{1}{4}+i\sqrt{2}\right) = \left(y^2-\frac{2}{4}y-\frac{35}{16}\right)\left(y^2+\frac{2}{4}y+\frac{1}{16}+2\right) = y^4+\frac{1}{2}y^3+$$
$$\frac{33}{16}y^2-\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{33}{16}y-\frac{35}{16}y^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{16}y-\frac{33\cdot35}{16\cdot16} = \ y^4-\frac{3}{8}y^2-\frac{17}{8}y-\frac{1155}{256} = 0\ ; \text{ верно!}$$

Шансов ошибиться было много. Осталось найти корни полного уравнения.

$$x = y-\frac{3}{4}\ ;\ \ x_1 = -\frac{5}{4}-\frac{3}{4} = -2\ ;\ \ x_2 = \frac{7}{4}-\frac{3}{4} = 1\ ;\ \ x_3 = -\frac{1}{4}+i\sqrt{2}-\frac{3}{4} = -1+i\sqrt{2}\ ;$$

$$x_4 = -\frac{1}{4}-i\sqrt{2}-\frac{3}{4} = -1-i\sqrt{2}\ ;$$

Ответы те же, что и в первых двух методах.

Общий вывод: Методы Феррари и Сопряжённых чисел практически дали одинаковый результат. Метод Феррари чуть длиннее из-за подготовительной работы. Метод Декарты-Эйлера гораздо сложнее:

а) Сперва надо освободиться от x^3 (вручную трудно, я пользовался калькулятором).

б) В приведённом неполном уравнении и резольвенты возникли немалые дроби. Хорошо, хоть исходное уравнение подобрано.

в) Кубические уравнения могут иметь три действительных корня, и тогда надо решать «неприводимое» уравнение, а это значит – через косинусы от трети арккосинусов, не считая иррациональных коэффициентов при них. Зато в конце легче. Если же действительный корень один, то придётся извлекать корни из комплексных величин, а это труд, да и критерий непростой. Я на каждом этапе всё перепроверял и ошибки находились.
В интернете примеры решаются по методу Феррари, правда иногда уравнение приводят к неполному виду, что, по-моему, бессмысленно. Метод Декарта-Эйлера дают с выводом и без, но я не нашел ни одного решенного примера.
На одном сайте приведён полный довольно сложный вывод и приведен пример, который почему-то решён по Феррари, причём с избавлением от x^3.[7] Непонятно: [4] и [5]

Видимо, из-за сложности арифметики студентам не задают решения этим методом, и поэтому дают только кратко или полно теорию.
Метод разложения на два квадратных уравнения попадается, но доводится только до системы аналогичной (5) и так как уравнение привели к неполному виду, а коэффициенты конечно специально подобраны, то удалось подобрать корни для $(q \cdot q^1)$[2], и решать систему не стали, сославшись, что решение снова приведёт к прежнему уравнению. Если её решать обычным методом, то это так. Однако, система легко решается с помощью сопряжённых чисел.

В. А. Арефьев, e-mail: Arefvik41@mail.ru

ark.ru 29 августа 2019

Источники:

1. ru.wikipedia.org (формулы приведения)
2. studfiles.net «Метод неопределенных коэффициентов»
3. cleverstudents.ru «Решение уравнений четвертой степени методом Феррари»
4. resolventa.ru «Подготовка школьников к ЕГЭ; метод Феррари с приведением к неполному уравнению»
5. studwork.org «Решение уравнений 3-й и 4-й степени» (тоже с приведением)
6. zaochnik.com «Решение уравнений четвертой степени»
7. sibac.info «Решение уравнений четвертой степени способом Декарта-Эйлера» Фомин А.В., Нурманова С.А.